אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

אולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית
גליונות תרגילי הכנה

רשימת עובדות שימושיות

שי גירון

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

מבוא

פעמים רבות שואלים עצמם מועמדים המתמודדים על מקומם בנבחרת: מהו החומר הנדרש לקראת התחרות? התשובה אינה פשוטה. למעשה, כל החומר של מה שקרוי "מתמטיקה אלמנטרית" נכלל בתחרות.
הייתי מסתכן ואומר כי: כדי להצליח בתחרויות במתמטיקה, כדאי (וצריך) לדעת מתמטיקה...

לרוע המזל אין תכנית הלימודים הסטנדרטית בבית הספר התיכון מקיפה את כל החומר הכלול בהגדרה זאת. אף על פי כן, לרוב מסתבר שידע נוסף ותרגול בנושאים החורגים מתכנית הלימודים הם מפתח להצלחה בתחרויות מתמטיקה בינלאומיות.
לצורך זה מובא בחוברת שלפניך אוסף של עובדות שימושיות במתמטיקה אלמנטרית (ולפעמים גם לא כל כך אלמנטרית). אפשר לומר כי ידיעת עובדות אלה היא כמעט הכרחית לכל מתמודד רציני. יתרה מכך, הוכחה של עובדות אלה היא תרגול רציני ומועיל ביותר [1]. כדי למנוע תסכול, סומנו העובדות שאינן ניתנות להוכחה באמצעות כלים אלמנטריים, או שהוכחתם קשה במיוחד, בפגיון (†). ובכן, נותר כעת רק להסיק את המסקנה המתבקשת לגבי השאר (כן כן, נא להפשיל שרוולים ולהתחיל לעבוד).

אני מודה לערן אסף אל עזרתו בהכנה ובהגהות החוברת.

שי גירון

[1] שים לב, אנו מניחים כאן כי העובדות הנלמדות בבית הספר כבר ידועות לקורא.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

תוכן ענינים

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

0.1 קומבינטוריקה

1. **עקרון ההכלה-הפרדה Inclusion - Exclusion**. אם A ו-B הן שתי קבוצות סופיות, אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. באופן כללי, אם $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות סופיות, אזי

$$\begin{gathered}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|) - \\
-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \ldots + \\
+(-1)^{n-2}(|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}| + \ldots + |A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|) + \\
+(-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
\end{gathered}$$

קיימת גם נוסחה "צמודה":

$$\begin{gathered}
\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cup A_{i_2}| + \ldots + \\
+(-1)^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \le n} |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n-1} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|
\end{gathered}$$

2. **תמורות וצירופים**. מספר התמורות של n עצמים הוא $n!$.

מספר האפשרויות לבחור קבוצה של k עצמים שונים מתוך n הוא $\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dbinom{n}{k}$.

מספר האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n סוגים שונים, כאשר מותר לבחור מספר בלתי מוגבל של עצמים מאותו סוג, הוא $\dbinom{n+k-1}{k}$.

מספר התמורות של n עצמים מ-r סוגים שונים, כאשר מהסוג i ישנם k_i עצמים ו-$\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, הוא המקדם המולטינומי $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!} = \dbinom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}$

3. **מקדמים בינומיים**. לכל n טבעי $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$. בפרט,

$$\begin{gathered}
\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n, \\
\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.
\end{gathered}$$

תכונות של המקדמים הבינומיים:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}.$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

4. **<u>זהות ונדרמונדה:</u>** לכל n,m טבעיים מתקיים

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{i}=\binom{m+n}{m}$$

5. **<u>עקרון שובך היונים</u>**. אם ידוע ש-$n+1$ יונים נמצאות ב-n שובכים, אזי ישנו בהכרח שובך המכיל לפחות שתי יונים. באופן כללי, אם יש לשבץ n עצמים ב-k קבוצות זרות ו-$n>km$ עבור m כלשהו, אזי בהכרח תהיה קבוצה המכילה לפחות $m+1$ עצמים.

6. **<u>הלמה של ארדש-סקרש (Erdös-Szekeres)</u>**. מתוך כל סדרה של $mn+1$ מספרים ממשיים שונים אפשר להוציא תת סדרה מונוטונית עולה של $n+1$ מספרים או תת סדרה מונוטונית יורדת של $m+1$ מספרים.

7. **<u>משפט ארדש - סקרש</u>**. לכל מספר טבעי n קיים מספר טבעי $ES(n)$ כך שבין כל $ES(n)$ נקודות במישור ישנם n מתוכן המהוות מצולע קמור. בנוסף,

$$ES(n)\le\binom{2n-4}{n-2}$$

8. **<u>משפט ספרנר (Sperner)</u>**. תהיה F משפחת תת קבוצות של קבוצה בגודל n ($r<\frac{n}{2}$), כך שאף אחת מהן איננה מכילה קבוצה אחרת. אזי $|F|\le\binom{n}{[n/2]}$.

9. **<u>משפט ארדש - גינזבורג - זיו (Erdös - Ginzburg - Ziv)</u>**. בכל קבוצה של $2n-1$ מספרים טבעיים ישנם n מספרים שסכומם מתחלק ב n.

10. **<u>משפט ארדש - קו - ראדו (Erdös - Ko - Rado)</u>**. תהיה F משפחה של תת קבוצות שונות בגודל r של קבוצה בגודל n, ($r\le\frac{n}{2}$), כך שהחיתוך של כל שתיים מהן אינו ריק. אזי

$$|F|\le\binom{n-1}{r-1}.$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

0.2 תורת הגרפים: הגדרות ומשפטים

1. **<u>הגדרות ומושגי יסוד.</u>**

* זוג $K=(V,E)$, כאשר $E\subseteq\{(v_1,v_2)|v_1,v_2\in V\}$, נקרא **גרף**. $v\in V$ נקרא **קודקוד** של K, $e_{v_1v_2}=(v_1,v_2)$ נקרא **קשת** של K המחברת v_1 ו-v_2.
* המספר $\deg(v)$ של הקשתות היוצאות מקודקוד v נקרא **דרגה** (או **ערכיות**) של v. מספר הקודקודים $|V|$ נקרא **הסדר** של K. קשתות בעלות קודקוד משותף נקראות **סמוכות**.
* גרף $(A\cup B,E)$, כאשר $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$, ו-$E\subset\{(v_1,v_2)|v_1\in A,v_2\in B\}$, נקרא גרף **דו-צדדי**.
* גרף (V,E) נקרא **שלם**, אם $E=\{(v_1,v_2)|v_1,v_2\in V\}$. את הגרף השלם בעל n קודקודים מסמנים ב-K_n.
* גרף (V,E) הינו **מישורי**, אם ניתן לצייר אותו במישור, כך שכל קודקוד יסומן על ידי נקודה, כל קשת המחברת שני קודקודים תסומן על ידי קו רציף המחבר את שני הקודקודים במישור, והקשתות אינן נחתכות. חלק קשיר של מישור המוגבל על ידי מספר קשתות נקרא **פאה** של גרף מישורי.
* סדרה $((v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{k-1},v_k))$ של קשתות נקראת **מסלול** בגרף. מסלול שבו $v_0=v_k$ נקרא מסלול סגור.
* גרף (V,E) נקרא **קשיר** אם כל שני קודקודים בו מחוברים על ידי מסלול. גרף קשיר שבו n קודקודים ולכל קודקוד יש ערכיות 2 נקרא גרף **ציקלי** מסדר n ומסומן ב-C_n.
  * גרף שבו בין כל שני קודקודים קיים מסלול אחד ויחיד המחבר אותם, נקרא **עץ**.
  * **יער** הוא גרף המורכב מאוסף עצים.
* **צביעה** של גרף היא צביעה של כל קודקודיו כך שכל שני קודקודים המחוברים ביניהם בקשת צבועים בצבעים שונים.
  * גרף הוא d-צביע אם קיימת צביעה שלו המשתמשת ב d צבעים.

2. **<u>עובדות יסוד.</u>**
   * סכום הערכיות של כל קודקודי גרף כלשהו שווה לפעמים מספר הקשתות שבו.
   * קיים מספר זוגי של קודקודים בעלי ערכיות איזוגית.

3. **<u>למת הנישואין (משפט Hall).</u>** נתונות קבוצה של M גברים וקבוצה של F נשים. ידוע, שלכל קבוצת גברים $A\subseteq M$ קבוצת ההיכרויות $S(A)$ של A גדולה או שווה בגודלה ל-A. קבוצת ההיכרויות של A מוגדרת כאוסף כל הנשים ב-F שמכירות גבר אחד לפחות ב-A.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

בתנאים אלה קיים זיווג של כל M הגברים לנשים, כך שכל אחד יזווג לאשה שהוא מכיר.

4. **קריטריון אור (Ore) למעגל המילטון (Hamilton).** מסלול בגרף נקרא מסלול המילטון, אם הוא עובר דרך כל קודקדי הגרף, פעם אחת בדיוק בכל קודקוד.
אם לכל שני קודקדים x, y ושאינם סמוכים בגרף מסדר n מתקיים $\deg(x)+\deg(y) \geq n$, אזי קיים בגרף מעגל המילטון.

5. **משפט לוקס (Lucas).** K_n הוא איחוד של מעגלים המילטוניים אם ורק אם n הוא אי זוגי. למשל K_9 הוא איחוד של 4 מעגלים המילטוניים (בדוק).

6. **קריטריון אוילר (Euler) למעגל אוילר.** מסלול בגרף נקרא מסלול אוילר, אם הוא עובר פעם אחת בדיוק דרך כל קשת בגרף. מסלול אוילר סגור נקרא מעגל אוילר.
   * אם הדרגה של כל קודקוד בגרף היא זוגית, אזי קיים בו מעגל אוילר.
   * אם הדרגה של כל קודקוד בגרף, מלבד 2, היא זוגית, אזי קיים מסלול אוילר בגרף.

7. **משפט רמזי (Ramsey).** נצבע קשתות של גרף שלם בן $\binom{r+s-2}{r-1}$ קודקודים בצבעים אדום וכחול. אזי ניתן למצוא בו תת גרף שלם על r קודקודים הצבוע באדום, או תת גרף שלם על s קודקודים הצבוע בכחול.
בפרט עבור $r = s = 3$ נקבל כי בכל קבוצה של 6 אנשים יש קבוצה של 3 מהם שכל אחד בה מכיר את שני האחרים או קבוצה של 3 אנשים שכולם זרים זה לזה.

8. **נוסחת אוילר לגרף מישורי.** אם נסמן ב-V את קבוצת קודקודיו של גרף מישורי, ב-E את קבוצת קשתותיו וב-F את קבוצת הפאות שלו, אזי $|V| + |F| - |E| = 2$.

9. **משפט טוראן (Turan) (גרסה מפושטת).** בכל גרף בעל n קודקודים שיש בו יותר מ-$\frac{n^2}{4}$ מקצועות, יש משולש.

10. **משפט שור (Schur).** אם נצבע גרף שלם בן $[n!e]+1$ קודקודים (כאן e הוא בסיס הלוגריתם הטבעי) ב-n צבעים, אזי ניתן יהיה למצוא בו משולש חד-גווני (מונוכרומטי).

11. **משפט ויזינג.** אם הדרגה המירבית של קודקוד בגרף היא D, אזי ניתן לצבוע את הקשתות שלו ב-$D+1$ צבעים כך שכל שתי קשתות סמוכות תהינה צבועות בצבעים שונים.

12. **משפט ברוקס.** אם כל הדרגות בגרף פשוט שאינו K_{d+1} אינן עולות על d, $d > 2$ אזי הגרף הוא d-צביע.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

0.3 תורת המספרים

1. **<u>המשפט הקטן של פרמה (Fermat)</u>**. יהי p מספר ראשוני. אזי לכל a טבעי הזר ל-p מתקיים $p|(a^{p-1}-1)$.

   ניסוח שקול: $p|a^p-a \quad \forall a \in \mathbf{N}$, או $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

   בנוסף, אם d היא החזקה הקטנה ביותר כך ש $a^d \equiv 1 \pmod p$ (אומרים ש d היא הסדר של a מודולו p) אזי $d|p-1$.

2. **<u>פונקצית אוילר (Euler)</u>**. לכל n טבעי נגדיר את פונקצית אוילר $\phi(n)$ כמספר המספרים הטבעיים בין 1 ל-n הזרים ל-n.

   עבור p ראשוני $\phi(p^k)=p^{k-1}(p-1)$.

   עבור שני מספרים טבעיים זרים p,q מתקיים $\phi(p)\phi(q)=\phi(pq)$.

   אם n הוא מספר טבעי בעל פירוק לראשוניים $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, אזי

$$\phi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r}\right).$$

3. **<u>משפט אוילר</u>**. אם $(a,m)=1$ אז $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

   בנוסף, אם d היא הסדר של a מודולו m אזי $d|\phi(m)$.

4. **<u>משפט וילסון (Wilson)</u>**. $p|(p-1)!+1$, אם ורק אם p ראשוני.

5. **<u>אלגוריתם אוקלידס (Euclides)</u>**. אלגוריתם למציאת המחלק המשותף הגדול ביותר d של שני מספרים טבעיים נתונים a,b.

   נחלק את a ב-b עם שארית: $a=k_1b+r_1$, כאשר $0 \le r_1 < b$. נמשיך הלאה באופן דומה:

$$\begin{aligned}
b &= k_2r_1+r_2, \quad 0 \le r_2 < r_1,\\
r_1 &= k_3r_2+r_3, \quad 0 \le r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
r_i &= k_{i+2}r_{i+1}+r_{i+2}, \quad 0 \le r_{i+2} < r_{i+1},\\
&\vdots\\
r_n &= k_{n+2}r_{n+1}.
\end{aligned}$$

   התהליך מסתיים כאשר r_i כלשהו מתחלק ב-r_{i+1} ללא שארית, ואזי $(a,b)=r_{i+1}$. כאן נוח לסמן $a=r_{-1}$, $b=r_0$.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

6. **משפט השאריות הסיני.**
יהיו $m_1, m_2, \ldots, m_n$ מספרים טבעיים זרים בזוגות. יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_n$ מספרים שלמים כלשהם. אזי למערכת השקילויות $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ עבור $i = 1, 2, \ldots, n$ יש פתרון. כל שני פתרונות של המערכת שקולים מודולו $m_1 m_2 \cdots m_n$.

7. **המחלק המשותף הגדול ביותר.** יהיו a, b מספרים שלמים שונים מאפס. אם $d = (a, b)$, אזי קיימים מקדמים שלמים m, n כך ש-$ma + nb = d$. בפרט, אם a, b זרים, אז קיימים m, n כאלה ש-$ma + nb = 1$.

8. **מספרים ראשוניים.**
   * משפט אוקלידס: קיים מספר אינסופי של מספרים ראשוניים.
   * לכל n ניתן למצוא מרווח של n מספרים עוקבים כך שביניהם אין אף מספר ראשוני.
   * †פוסטולט ברטרנד (Bertrand's Postulate): בין n ל-$2n$ קיים מספר ראשוני.
   * †משפט המספרים הראשוניים: עבור $n \gg 1$ מספר הראשוניים שאינם עולים על n שווה בקירוב ל-$\dfrac{n}{\ln n}$.

†9. **משפט דיריכלה (Dirichlet).** כל סדרה חשבונית בה האיבר הראשון וההפרש זרים זה לזה, מכילה אינסוף מספרים ראשוניים. בפרט, קיימים אינסוף ראשוניים מהצורה $4n+3$, $6n+5$. (הטענה האחרונה ניתנת להוכחה באמצעים אלמנטריים.)

10. **משוואת פל (Pell).** המשוואה הדיופנטית

$$x^2 - dy^2 = 1, \qquad d \in \mathbf{Z}, \quad \sqrt{d} \notin \mathbf{Q}.$$

נקראת משוואת פל. בהנתן הפתרון החיובי הקטן ביותר שלה (x_0, y_0), ניתן לקבל את כל הפתרונות ע"י הנוסחה

$$x + y\sqrt{d} = \pm(x_0 + y_0\sqrt{d})^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

באופן כללי, עבור המשוואה $x^2 - dy^2 = c, \quad c \in \mathbf{Z}$, קיום של פתרון אחד גורר קיום אינסוף פתרונות. שים לב, קיום פתרון אינו מובטח.

11. **שלשות פיתגוריות.** שלשה (x, y, z) של מספרים טבעיים המקיימת $x^2 + y^2 = z^2$, נקראת שלשה פיתגורית. כל השלשות הפיתגוריות המצומצמות, כלומר כאלה שלאיבריהן אין מחלק משותף גדול מ-1, מאופיינות ע"י הצורה $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$, כאשר a, b הם מספרים טבעיים כלשהם בעלי זוגיות שונה. $(a > b)$.

12.[†] **המשפט הגדול של פרמה (Fermat).** למשוואה $x^n + y^n = z^n$ אין פתרונות טבעיים עבור $n > 2$.

הערה: ישנם מקרים פרטיים, למשל $n = 3$, $n = 4$, בהם אפשר להוכיח את הטענה ישירות בקלות יחסית.

13. **שאריות ריבועיות.** נניח כי $(a, m) = 1$. המספר a נקרא שארית ריבועית מודולו m, אם קיים x כך ש- $x^2 \equiv a \pmod m$.

משפט: לכל p ראשוני אי זוגי יש בדיוק $\frac{p-1}{2}$ שאריות ריבועיות השונות מאפס.

רשימה של שאריות ריבועיות עבור כמה מספרים ראשוניים קטנים:

2	1
3	1
5	1, 4
7	1, 2, 4
11	1, 3, 4, 5, 9

14. **סמל לז'נדר.** יהי p ראשוני אי זוגי, אז סמל לז'נדר מוגדר באופן הבא:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{אם } a \text{ שארית ריבועית מודולו } p \\ -1 & \text{אם } a \text{ אינו שארית ריבועי מודולו } p \\ 0 & \text{אם } p|a \end{cases}$$

אם $a \equiv b \pmod p$ אזי $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$. בנוסף מתקיימות עבור סמל לז'נדר התכונות הבאות:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right), \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

15. **קריטריון אוילר לשארית ריבועית.** אם p ראשוני, $(a, p) = 1$ אז

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$$

16. **חוק ההדדיות הריבועית.** אם p, q ראשוניים אזי:

אם לפחות אחד מהם קונגרואנטי ל 1 מודולו 4, אז $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$, ואם שניהם קונגרואנטיים ל 3 מודולו 4, אזי $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right)$.
בניסוח שקול,

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

17. **<u>מספרים מושלמים</u>.** מספר טבעי נקרא מושלם אם הוא שוה לסכום כל מחלקיו החיוביים השונים ממנו. למשל, המספר 6 הוא המספר המושלם הקטן ביותר.
משפט: אם $2^m - 1$ הוא ראשוני אזי המספר $2^{m-1}(2^m - 1)$ הוא מספר מושלם. להיפך, כל המספרים המושלמים הזוגיים הם מהצורה $2^{m-1}(2^m - 1)$ כאשר $2^m - 1$ ראשוני.
הערה על מספרים מושלמים אי זוגיים: שאלת קיומם של כאלה היא בעיה פתוחה. אין היום אף דוגמה למספר כזה ואין אף הוכחה השוללת את קיומו.

18. **<u>משוואת הפרשים לינארית</u>.** (מסדר שני)
נניח כי הסדרה $\{a_n\}$ נתונה ע"י משוואת ההפרשים

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

כאשר A, B מקדמים נתונים ו-a_0, a_1 נתונים אף הם. למשוואה הריבועית $\lambda^2 = A\lambda + B$ נקרא המשוואה האופיינית של הסדרה.
אם למשוואה זאת יש שני שורשים שונים α, β, אזי $a_n = K\alpha^n + L\beta^n$ עבור K, L מסויימים, שערכיהם נקבעים לפי הערכים של a_0 ו-a_1.
אם למשוואה האופיינית יש שני שורשים שווים α, אזי $a_n = (K + nL)\alpha^n$ עבור מקדמים K, L מסויימים הנקבעים לפי הערכים של a_0 ו-a_1.
למשפט זה קיימת הכללה גם עבור משוואת הפרשים מסדר כלשהו ולאו דווקא מסדר 2.
דוגמה: סדרת מספרי פיבונצ'י (Fibonacci) מוגדרת על ידי משוואת ההפרשים (נוסחת נסיגה) הבאה:

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 1.$$

המשוואה האופיינית שלה היא $\lambda^2 = \lambda + 1$ ופתרונותיה הם

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad \beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),$$

לכן כל מספר פיבונצ'י F_n ניתן להצגה באופן הבא:

$$F_n = K\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + L\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

את המקדמים K ו-L אפשר לקבל מתוך "תנאי התחלה" דהיינו $F_1 = 0$ ו-$F_2 = 1$.
במקרה זה מקבלים $-L = K = 1/\sqrt{5}$.

0.4 אי שויונות

1. **אי שויון הממוצעים.** לכל $a_1, a_2, \ldots, a_n$ חיוביים מתקיים אי השויון בין הממוצע ההרמוני, הממוצע ההנדסי והממוצע החשבוני:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

(אי השויון השני תקף גם עבור מספרים אי שליליים לאו דווקא חיוביים ממש).

נסמן ב-M_i את הביטוי $\left(\frac{a_1^i+a_2^i+\ldots+a_n^i}{n}\right)^{1/i}$. אזי לכל אוסף של a_k-ים חיוביים ולכל $i<j$ שלמים מתקיים $M_i \le M_j$. השויון מתקיים אך ורק במקרה של $a_1=\ldots=a_n$.

2. **אי שויון ברנולי (Bernoulli).** אם $\alpha \ge 1$ אזי $(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$ לכל $x>-1$.
אם $0<\alpha<1$ אזי $(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$ לכל $x>-1$.

3. **אי שויון קושי-שוורץ (Cauchy-Schwarz).**
תהינה $A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ שתי קבוצות מספרים ממשיים. אזי מתקיים

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

שויון מתקיים אך ורק כאשר הוקטורים A, B תלויים לינארית, כלומר קיים קבוע λ כך ש-$a_j=\lambda b_j$ לכל $1 \le j \le n$.

4. **אי שויון ניוטון (Newton).** (ראה פרק "פולינומים", משפט ניוטון) עבור מספרים חיוביים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ נגדיר את הממוצע הסימטרי ה-k שלהם:

$$M_k=\left(\frac{\sigma_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

אזי

$$M_1 \ge M_2 \ge \cdots \ge M_n,$$
$$M_k^{2k} \ge M_{k-1}^{k-1}\cdot M_{k+1}^{k+1}.$$

5. **אי שויון מינקובסקי (Minkowski).** לכל $a_i, b_i \ge 0$, $i=1,2,\ldots,n$ ו-$p>1$ מתקיים

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

עבור $p < 1$ מתהפך סימן האי שוויון.
שוויון מתקיים אם ורק אם $b_k = \lambda a_k$ (λ קבוע) לכל k.

6. **<u>אי שוויון ינסן (Jensen)</u>.** פונקציה רציפה $f(x)$ המוגדרת על קטע $[x_1, x_2]$ נקראת קמורה, אם לכל $a, b \in [x_1, x_2]$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right).$$

אם f קמורה בקטע $[a, b]$, אזי באותו קטע

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}$$

לכל בחירה של $a_i \in [a, b]$.

7. **<u>אי שוויון הלדר (Hölder)</u>.** אם $p > 1$ וגם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, אזי

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

אם $p < 1$ מתהפך סימן האי שוויון.
שוויון מתקיים אם ורק אם $b_k = \lambda a_k$ (λ קבוע) לכל k

8. **<u>אי שוויון התמורות (Rearrangement Inequality)</u>.** יהיו $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ ו-$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ מספרים ממשיים. אזי לכל תמורה $\sigma = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ מתקיים

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a'_1b_1 + a'_2b_2 + \ldots + a'_nb_n \geq a_1b_n + \ldots + a_nb_1$$

השויון מתקיים רק אם $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

9. **<u>אי שויון צ'בישב (Chebyshev)</u>.** אי שויון זה מתקבל כמסקנה מאי שויון התמורות. יהיו $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ ו-$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ מספרים ממשיים. אזי

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

10. **<u>אי שויון שור (Schur)</u>.** לכל $x, y, z \geq 0$

$$x^n(x-y)(x-z) + y^n(y-z)(y-x) + z^n(z-x)(z-y) \geq 0.$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

11. **<u>אי שוויון יאנג (Young).</u>** יהיו p, q מספרים חיוביים כך ש $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, אזי

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

לכל שני מספרים חיוביים a, b.

גרסה כללית של אי שוויון יאנג:

אם f פונקציה ממשית עולה ממש, רציפה, אי שלילית כך ש $f(0) = 0$, ו a, b מספרים חיוביים כך ש $b \le f(a)$, אזי

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \ge ab$$

כאשר השוויון מתקיים אם ורק אם $b = f(a)$.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

0.5 מספרים קומפלקסיים

1. **משמעות גיאומטרית.** למספר הקומפלקסי $z = x + iy$ ניתן לייחס משמעות גיאומטרית ע"י התאמתו לוקטור מראשית הצירים של המישור הקרטזי לנקודה $Z(x, y)$. לפיכך הגודל $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ הוא אורך הוקטור (מרחק קצהו מראשית הצירים). $\arg z = \arctan \dfrac{y}{x}$ שווה לזוית בין וקטור הציר x. המספר z מיוצג ע"י $(|z|, \arg z)$ בקואורדינטות פולריות. אם בקואורדינטות פולריות $z = (r, \alpha)$ אזי $z = r\cos\alpha + ir\sin\alpha$. נהוג גם לסמן $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$, או $\cos\alpha + i\sin\alpha = cis\alpha$. הצמוד הקומפלקסי של $z = x + iy$ הוא $\bar{z} = x - iy$, והוא מתאר את השיקוף של הנקודה (x, y) ביחס לציר x.

2. **נוסחאות דה מואבר (De Moivre).**

יהיו

$$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1), \quad z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2).$$

אזי

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$

3. **משפט דה מואבר.**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$
$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta.$$

מסקנה:

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta$$

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} \binom{n}{2k+1} (-1)^k \cos^{n-2k-1}\theta \sin^{2k+1}\theta$$

4. **<u>שורשי יחידה.</u>** לפולינום x^N-1 יש N שורשים שונים במספרים קומפלקסיים. שורשים אלה הם

$$\omega_k=\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=e^{\frac{2\pi i}{N}k},\quad k=1,2,\ldots,N$$

(שים לב, $\omega_N=1$). המספרים ω_k נקראים שורשי יחידה מסדר N. הם מקיימים

$$\omega_1^l+\omega_2^l+\ldots+\omega_N^l=0,\quad l=1,2,\ldots,N-1.$$

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

0.6 פולינומים

1. **הלמה של גאוס (Gauss).**

הגדרה: פולינום $p(x)$ בעל מקדמים שלמים שאין להם גורם משותף גדול מ-1, נקרא פולינום פרימיטיבי.

למה: אם $p(x)$, $q(x)$ הם שני פולינומים פרימיטיביים, אזי גם $p(x)\cdot q(x)$ הוא פולינום פרימיטיבי.

בניסוח אחר: אם פולינום מוני (כלומר בעל מקדם מוביל 1) בעל מקדמים שלמים הוא מכפלה של שני פולינומים מוניים עם מקדמים רציונליים, אזי המקדמים הרציונליים הללו הם שלמים.

2. **קריטריון איזנשטיין (Eisenstein).** נתון כי כל המקדמים a_i של הפולינום

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

הם שלמים. נתון כי קיים מספר ראשוני p כך ש-$p|a_i$ לכל $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, אבל $p \not| a_n$ וגם $p^2 \not| a_0$. אזי $Q(x)$ הוא אי פריק מעל לשלמים.

בנוסף, אם קיים ראשוני p כך ש $p|a_i$ לכל $i = 1, 2, \ldots n$ אבל $p \not| a_0$ וגם $p^2 \not| a_n$ אז $Q(x)$ הוא אי פריק מעל השלמים.

3. **נוסחאות ויאטה (Viète).** עבור פולינום ריבועי $p(x) = ax^2 + bx + c$ בעל שורשים α_1 ו-α_2 מתקיים

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

באופן כללי: עבור פולינום $p(x) = a_n x_n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ מתקיימים הקשרים:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$
$$\ldots$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

נוסחאות נוספות:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}.$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

4. **חלוקת פולינומים.** נתונים שני פולינומים $f(x)$, $g(x)$ בעלי מקדמים השייכים לשדה F (F הוא שדה המספרים הממשיים או הקומפלקסיים או הרציונליים). נתון כי $g(x) \neq 0$. אזי קיימים פולינומים $q(x)$ ו-$r(x)$ בעלי מקדמים ב-F, כך ש-

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

כאשר $r(x)$ הוא פולינום האפס או פולינום שדרגתו קטנה מזאת של $g(x)$. כאן $q(x)$ נקרא המנה של החלוקה ו-$r(x)$ נקרא השארית של החלוקה של $f(x)$ ב-$g(x)$.

5. **משפט ניוטון.**

הפונקציות $\sigma_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ עבור $k = 1, 2, \ldots, n$ נקראות פולינומים סימטריים אלמנטריים מסדר n. למשל, $ab + bc + ca$ הוא פולינום סימטרי אלמנטרי מסדר 3 של (a, b, c), וכמוהו גם abc.

משפט: כל פולינום סימטרי במשתנים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ניתן להצגה באופן יחיד ע"י פולינום של הפונקציות הסימטריות האלמנטריות מסדר n של $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

6. **משפט בזו (Bezout).** השארית של $p(x)$ בחלוקה ב-$(x - a)$ שווה ל-$p(a)$. בפרט, אם α הוא שורש של $p(x)$, אזי $p(x)$ מתחלק ב-$(x - \alpha)$ ללא שארית.

אם $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ הם שורשים של פולינום $p(x)$ בעל דרגה n, אזי

$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

כאשר a הוא המקדם של x^n.

7.[†] **המשפט היסודי של האלגברה.**

כל פולינום $p(x)$ בעל מקדמים ממשיים או קומפלקסיים ניתן לפירוק מעל שדה המספרים הקומפלקסיים, כלומר קיימים מספרים קומפלקסיים $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ כך ש-

$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

יהי p פולינום בעל מקדמים ממשיים. אזי עבור כל α שהוא אפס של p (כלומר, $p(\alpha) = 0$), גם $\bar{\alpha}$ הוא אפס של p. מכאן נובע, שכל פולינום במקדמים ממשיים ניתן לפירוק לגורמים לינאריים וריבועיים במקדמים ממשיים.

8. **שורשים רציונליים של פולינומים.**

אם $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ הוא שורש של פולינום בעל מקדמים שלמים

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

אזי p מחלק את a_0 ואילו q מחלק את a_n. משפט זה מאפשר מציאת כל השורשים הרציונליים של פולינומים בעלי מקדמים שלמים.

9.[†] **משפט אבל - גלואה.**

אי אפשר למצוא נוסחה כללית למציאת שורשים של פולינום ממעלה 5 או יותר, המבוססת על מספר סופי של פעולות חשבון והוצאת שורשים.

10. **משפט קיילי המילטון.**

הגדרה: הפולינום האופייני של מטריצה A הוא $f(x)=\det(Ix-A)$, כלומר הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת לאחר שמחסירים x מאברי האלכסון הראשי.

משפט קיילי המילטון: כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה, דהיינו אם הפולינום האופייני של A הוא $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, אזי

$$f(A)=a_0I+a_1A+\ \ldots+a_nA^n=0$$

כאשר A^k היא המטריצה המתקבלת אם נכפיל את A בעצמה k פעמים.

11. **פרוקים שימושיים.**

$$\begin{aligned}
(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ \cdots+b^{2n}) &= a^{2n+1}+b^{2n+1}\\
(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+b^n) &= a^n-b^n\\
(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) &= a^3+b^3+c^3-3abc\\
3(a+b)(b+c)(c+a) &= (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\\
(a+b-c)(c+a-b)(b+a-c) &= a^2b+b^2a+c^2a+a^2c+b^2c+c^2b-2abc\\
&\quad -a^3-b^3-c^3
\end{aligned}$$

0.7 אינדוקציה

1. **אינדוקציה.** אם $A \subseteq \mathrm{N}$ היא תת קבוצה של מספרים טבעיים, $1 \in A$ וכמו כן

$$k \in A \Longrightarrow k+1 \in A,$$

אזי $A = \mathrm{N}$.

2. **סכומים שימושיים.** זהויות שימושיות אלה ניתן להוכיח בעזרת אינדוקציה:

$$\begin{aligned}
\sum i &= \frac{n(n+1)}{2}\,; \\
\sum i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,; \\
\sum i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2; \\
\sum i(i+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,; \\
\sum i(i+1)(i+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\,; \\
\sum \frac{1}{i(i+1)} &= 1-\frac{1}{n+1}\,.
\end{aligned}$$

הערה: כל הסכומים הם מ-1 עד n.

3. **עקרון המינימום.** בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים איבר מינימלי.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

0.8 טריגונומטריה

בשני הסעיפים הבאים נשתמש בסימנים ובקיצורים הבאים:

ABC: משולש כלשהו

O: מרכז המעגל החוסם את ABC.

I: מרכז המעגל החסום ב-ABC.

H: נקודת חיתוך הגבהים במשולש.

a, b, c: צלעות המשולש: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

α, β, γ: זויות המשולש, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$.

h_a, ω_a, m_a: תיכון, חוצה זוית וגובה על הצלע a.

p: חצי היקף המשולש.

R: רדיוס המעגל החוסם את ABC.

r: רדיוס המעגל החסום במשולש.

S: שטח. למשל S_{ABC} מציין את שטחו של המשולש ABC.

1. **<u>משפטים בסיסיים במשולש.</u>**

משפט הסינוסים: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

משפט הקוסינוסים: $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

משפט הטנגנסים: $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$$

משפט ההיטלים: $$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

2. **<u>נוסחת הרון (Heron), נוסחת ברהמגופתא (Brahmagupta).</u>**

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

אם $ABCD$ הוא מרובע ציקלי, כלומר בר חסימה במעגל, שמחצית היקפו היא s אזי

$$S_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

3. **שוויונות שונים.**

$$S = r \cdot p = \frac{abc}{4R}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{R+r}{R}, \qquad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{p}{R}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{p^2 - 4R^2 - 4Rr - r^2}{4R^2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma = \frac{p^2 - 4R^2 + r^2}{4R^2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - \frac{r}{2R}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{4R+r}{2R}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$abc = 4Rrp, \qquad ab + ac + bc = p^2 + 4rR + r^2$$

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}, \qquad p = 4R\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$P+Q+R=0 \iff \sin P + \sin Q + \sin R = -4\sin\frac{P}{2} + \sin\frac{Q}{2} + \sin\frac{R}{2}$$

במשולש CBA אחת הזוויות שווה ל θ אם ורק אם $p = 2R\sin\theta + r\cot\frac{\theta}{2}$, וגם אם ורק אם $p\tan\frac{\theta}{2} + 2R\cos\theta = 2R + r$.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

4. **<u>תיכונים, חוצי זויות וגבהים.</u>**

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \\ \omega_a &= \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)} = \sqrt{ab-d_1d_2}, \\ h_a &= \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \end{aligned}$$

כאשר d_1, d_2 הם אורכי הקטעים שחוצה הזווית מקצה על הצלע הנגדית

5. **<u>נקודות מיוחדות במשולש.</u>**

$$\begin{aligned} &IO^2 = R^2 - 2rR \\ &IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2 \\ &IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 - 16R + 5r^2) \\ &OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2 \\ &GH = \frac{2}{3}OH \end{aligned}$$

6. **<u>אי שוויונות חשובים במשולשים.</u>**

$$\begin{gathered} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le 3/2, \\ \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \ge \sqrt{3}, \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ R \ge 2r \\ 9R^2 \ge a^2 + b^2 + c^2 \end{gathered}$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

0.9 הנדסת מישור ומרחב, וקטורים

1. **מעגל אפולוניוס (Apollonius).** נניח כי נקודה נעה במישור כך שהיחס r של המרחקים ממנה לשתי נקודות נתונות נשמר קבוע. אזי המסלול של הנקודה הינו מעגל (ישר במקרה פרטי של יחס 1). מעגל זה נקרא מעגל אפולוניוס.

2. **מעגל תשע הנקודות.** אמצעי צלעות המשולש ABC, שלושת עקבי הגבהים ואמצעי הקטעים AH, BH, CH נמצאים על מעגל אחד, הנקרא מעגל תשע הנקודות. רדיוסו שווה ל-$\frac{R}{2}$.

3. **משפט פוירבך (Feuerbach).** מעגל תשע הנקודות של משולש נתון משיק למעגל החסום בו ולשלושת המעגלים החסומים בו מבחוץ.

4. **קו אוילר.** נתון משולש ABC. הנקודות H (מפגש הגבהים), M (מרכז הכובד) ו-O (מרכז המעגל החוסם) נמצאות על ישר אחד הנקרא קו אוילר. הנקודה M מחלקת את הקטע OH ביחס $\frac{1}{2} = \frac{OH}{MH}$. מרכז מעגל תשע הנקודות נמצא אף הוא על ישר זה.

5. **קו סימסון (Simson).** נתון משולש כלשהו. מנקודה כלשהי על המעגל החוסם אותו מורידים שלושה אנכים על צלעות המשולש. עקבי שלושת אנכים אלה (על צלעות המשולש) נמצאים על ישר אחד הנקרא קו סימסון. גם המשפט ההפוך נכון: אם מנקודה כלשהי מורידים אנכים לצלעות משולש, ועקבי האנכים הללו נמצאים על ישר אחד, אז הנקודה נמצאת על המעגל החוסם את המשולש.

6. **משפט טלמי (Ptolemy).** במרובע ציקלי $ABCD$ מתקיים

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

במרובע שאיננו ציקלי מתקיים אי השויון

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD.$$

7. **משפט טלמי המוכלל - משפט קייסי (Casey).** יהיו A, B, C, D ארבעה מעגלים המשיקים למעגל נתון ומסודרים לאורכו בסדר זה. נסמן ב-AB את אורך המשיק החיצוני (הפנימי) המשותף ל-A ו-B, כאשר A ו-B נמצאים מאותו צד של המעגל הנתון (משני צדדים שונים). אם נגדיר את שאר המרחקים באופן דומה, אזי מתקיים

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

8. **משפט צ'בא (Ceva).** תהיה O נקודה במישור המשולש ABC. נניח כי הישרים AO, BO, CO חותכים את הישרים BC, CA, AB בנקודות D, E, F בהתאמה, השונות מ-A, B, C. אזי

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

המשפט ההפוך: אם בהנתן שלוש נקודות D, E, F על צלעות מתאימות של המשולש מתקיים השוויון הנ"ל, אזי AD, BE, CF עוברים דרך נקודה אחת או שהם מקבילים זה לזה.

9. **משפט מנלאוס (Menelaus).** אם ישר חותך את הצלעות BC, CA, AB של המשולש ABC בנקודות D, E, F בהתאמה, אזי מתקיים

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

המשפט ההפוך: אם השויון הנ"ל מתקיים עבור שלוש נקודות D, E, F על BC, CA, AB בהתאמה, אזי הנקודות D, E, F נמצאות על ישר אחד.

10. **משפט האנכים.**

אם מעלים אנכים מנקודות $D,\ E,\ F$ שעל $BC,\ AC,\ AB$ במשולש ABC בהתאמה, אזי שלושת אנכים אלו נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם
$BD^2+CE^2+AF^2=CD^2+AE^2+BF^2$.

11. **משפט נפוליאון.** יהי ABC משולש ועל צלעותיו בנויים כלפי חוץ שלשה משולשים דומים PCB, CQA ו-BAR. אזי מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים האלה יוצרים משולש הדומה לשלושת משולשים אלה. מקרה פרטי מענין מתקבל עבור משולשים חופפים.

12. **משפט הפרפר.** תהי M הנקודה האמצעית של מיתר PQ של מעגל כלשהו. נניח כי דרך M עוברים שני מיתרים AB ו-DC. המיתרים AD ו-BC חותכים את PQ בנקודות אותן נסמן X ו-Y. אזי הנקודה M היא אמצע הקטע XY.

13. **אינוורסיה.** תהיה O נקודה במישור ו-k מספר ממשי חיובי. העתקה F המעבירה נקודה $A\neq O$ במישור לנקודה A' על קרן OA כך ש-$OA'\cdot OA=k^2$, נקראת אינוורסיה סביב מרכז O עם רדיוס k.

תכונות: האינוורסיה הפוכה לעצמה, כלומר $F\circ F\equiv I$. ישר העובר דרך O מועתק לעצמו. ישר שאינו עובר דרך O מועתק למעגל העובר דרך O. מעגל שאינו עובר דרך O מועתק למעגל שאינו עובר דרך O.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

במערכת קרטזית עם ראשית הצירים ב-O ההעתקה מוגדרת כ-

$$F:(x,y)\longrightarrow\left(x'=\frac{kx}{x^2+y^2}\,,\,y'=\frac{ky}{x^2+y^2}\right)$$

או במישור הקומפלקסי $F:z\longrightarrow k/\bar{z}$.

אינוורסיה הינה העתקה אנטיקונפורמית, כלומר היא שומרת זויות ומשנה כיוון.

14. **העתקות תנועה במישור (motions on Euclidean plane): שיקוף, סיבוב הזזה.**
העתקה במישור נקראת תנועה, אם היא שומרת על מרחקים בין נקודות. כל תנועה השומרת כיוון (proper motion) היא הזזה או סיבוב סביב נקודה כלשהי. כל תנועה המחליפה כיוון (improper motion) היא שיקוף ביחס לישר כלשהו.
הרכבה של סיבובים בזוית כוללת של $k\cdot 360^\circ$ היא הזזה.
תנועות יוצרות חבורה ביחס להרכבת העתקות. קבוצת התנועות שומרות הכיוון היא תת חבורה שלה.

15. **משפט פפוס (Pappus).** תהינה A, B, C - נקודות על ישר l ותהינה A', B', C' - נקודות על ישר l'. אזי נקודות החיתוך של AB' ו-$A'B$, AC' ו-$A'C$, BC' ו-$B'C$ נמצאות על ישר אחד.

16. **משפט דזארג (Désargues).** נתונים שני משולשים ABC, $A'B'C'$. כל זוג ישרים מבין AA', BB', CC' נחתך. אזי נקודות החיתוך של AB ו-$A'B'$, AC ו-$A'C'$, BC ו-$B'C'$ נמצאות על ישר אחד אם ורק אם הישרים AA', BB', CC' עוברים דרך נקודה אחת.

17. **משפט ארדש - מורדל (Erdös - Mordell).** תהי P נקודה פנימית במשולש כלשהו. נסמן ב-x, y, z את מרחקיה מצלעות המשולש וב-p, q, r את מרחקיה מהקדקודים. אזי

$$p+q+r\geq 2(x+y+z).$$

18. **המשפט האיזופרימטרי.** מבין כל העקומות הסגורות, העקומה שתוחמת את השטח הגדול ביותר היא מעגל.

19. **משפט הלי (Helly).** תהינה $A_1, A_2, \ldots, A_n$ קבוצות קמורות לא ריקות במישור (במרחב). אם לכל שלוש (ארבע) מהן יש נקודה משותפת, אזי לכולן יש נקודה משותפת. אם נתונה

משפחה אינסופית של קבוצות כאלה, אזי כדי שיתקיים המשפט דרוש בנוסף גם כי לפחות אחת מהקבוצות היא חסומה.

20. **משפט קרתיאודורי (Caratheodory).**

הגדרה: הקמור (convex hull) של קבוצת נקודות במישור (במרחב) היא הקבוצה הקמורה ה"קטנה ביותר" המכילה אותה (כלומר החיתוך של כל הקבוצות הקמורות המכילות את A).

משפט: כל נקודה בקמור של קבוצה מישורית (מרחבית) S היא צירוף לינארי קמור של שלוש (ארבע) נקודות מתוך S.

21. **הנדסת מרחב - מושגים בסיסיים.**

* שני ישרים במרחב נקראים מקבילים אם הם נמצאים במישור אחד והם מקבילים בו.
* ישר l העובר דרך נקודה P במישור π נקרא מאונך למישור π, אם הוא מאונך לכל ישר ב-π העובר דרך P. כל ישר ב-π העובר דרך P נקרא מאונך לישר l.
* ; גודל של זוית תלת-מימדית מוגדר על ידי השטח שזוית זו חותכת מכדור היחידה עם מרכז בקודקוד הזוית. עבור הזוית הנוצרת על ידי שלוש פאות של פאון בין שלוש הזויות המרכיבות אותה מתקיים אי שויון המשולש: סכום של שתיים מהן גדול מהשלישית.
* זוית בין ישר l למישור π נמדדת במישור σ העובר דרך l ומאונך למישור π. היא שווה לזוית בין הישר l לישר החיתוך בין המישורים π ו-σ. זוית בין שני ישרים l_1,l_2 במרחב מוגדרת כזוית בין l_1 וישר אחר L_2 החותך אותו ומקביל לישר l_2.
* ישר l מאונך למישור π אם הוא מאונך לשני ישרים לא מקבילים ב π.

22. **פאונים ופאונים משוכללים (צורות ארכימדס).**

פאון במרחב שקול לגרף מישורי ולכן מקיים את משפט אוילר:

$$Faces + Vertices = Edges + 2$$

פאון קמור נקרא משוכלל אם כל פאותיו הן מצולעים משוכללים החופפים ביניהם. קיימים חמישה פאונים משוכללים במרחב. אלה הם

tetrahedron (4 faces and 4 vertices),
cube (6 faces and 8 vertices),
octahedron (8 faces and 6 vertices),
dodecahedron (12 faces and 20 vertices),
icosahedron (20 faces and 12 vertices).

23. **משפט שלושת האנכים.** נתבונן בישר l הנמצא במישור π ובנקודה Q הנמצאת על l. תהי P נקודה מחוץ ל-π. נסמן ב-A את עקב האנך המורד מ-P על המישור π. אזי, הנקודה A נמצאת על הישר l. לקטע QA נקרא ההטל של המשופע QP על המישור π. מתקיים כמובן $QP > QA$.

א. אם ישר l_1 הנמצא במישור π עובר דרך Q ומאונך להטל QA, אזי הוא מאונך גם למשופע QP.

ב. אם ישר l_1 הנמצא במישור π עובר דרך Q ומאונך למשופע QP אזי הוא מאונך גם להטלו QA.

24. **עובדות שימושיות אודות טטרהדרונים.**

* כל תיכוני הטטרהדרון (כלומר קטעים המחברים קודקוד עם נקודת חיתוך התיכונים של פאה נגדית) נחתכים בנקודה אחת. נקודת חיתוך זו מחלקת כל תיכון ביחס $1:4$.
* אם שני זוגות של מקצועות מנוגדים מאונכים, אזי גם הזוג השלישי מאונך. טטרהדרון כזה נקרא אורתוגונלי.
* בטטרהדרון אורתוגונלי כל ארבעת הגבהים נפגשים בנקודה אחת, ולהיפך.

25. **משפט מנלאוס למרחב.** יהי $ABCD$ טטראדר. הנקודות P, Q, R, S נמצאות על הישרים AB, BC, CD, DA בהתאמה. אזי P, Q, R, S נמצאות על מישור אחד אם ורק אם

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{DR} \cdot \frac{DS}{AS} = 1$$

26. **וקטורים - מושגים בסיסיים.** נגדיר וקטור במרחב בצורה כללית כשלשה (x, y, z). שלשה זאת מקבלת פירוש גיאומטרי כקטע ישר במערכת צירים תלת-מימדית המחבר את ראשית הצירים והנקודה (x, y, z), ומכוון מהראשית לכוון הנקודה (x, y, z). זוית בין שני וקטורים היא הזוית בין שני הקטעים המייצגים אותם. אורך של וקטור מוגדר כגודל $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ופירושו הגיאומטרי הוא אורך הקטע המייצג את הוקטור.
סימון מקובל: עבור וקטור $v = (x, y, z)$ מסמנים $v_x = x$, $v_y = y$, $v_z = z$. הזוית בין שני וקטורים v_1, v_2 מסומנת ע"י $\angle v_1 v_2$. אורך הוקטור v מסומן ע"י $|v|$.

27. **פעולות בוקטורים.**

* הכפלה בקבוע: $c \cdot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$,
* מכפלה סקלרית: $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

במושגים גיאומטריים $v_1 \cdot v_2 = |v_1||v_2| \cos \angle v_1 v_2$.

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

* מכפלה וקטורית:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} = \\ &= (v_{1y}v_{2z} - v_{1z}v_{2y}, v_{1z}v_{2x} - v_{1x}v_{2z}, v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x}) \end{aligned}$$

$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ מסמנים את וקטורי היחידה בכיוון ציר x, y, z בהתאמה. במושגים גיאומטריים המכפלה הוקטורית של שני וקטורים היא וקטור המאונך למישור המכיל את שניהם וארכו שווה ל-$|v_1||v_2|\sin\angle v_1v_1$.

28. **נוסחאות שימושיות.**

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= -v_2 \times v_1 \\ a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) &= c \cdot (a \times b) \\ a \times (b \times c) &= (a \cdot c) \cdot b - (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

29. **מושגים שכיחים מנקודת מבט וקטורית.**

* משוואת מישור המאונך לוקטור n היא $n \cdot x = k$.
* משוואת ישר העובר דרך a, b היא $x = (1-t)a + tb$.

0.10 גיאומטריה אנליטית וחתכים קוניים

1. **שלושה ישרים.** שלושה ישרים

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \qquad a_3x + b_3y + c_3 = 0,$$

נפגשים בנקודה אחת, אם ורק אם מתקיים התנאי

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2. **שטח המשולש.** נתון משולש בעל קודקודים ששעוריהם $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$. אזי השטח S_{ABC} מחושב באופן הבא:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|x_by_c - x_cy_b + x_cy_a - x_ay_c + x_ay_b - x_by_a|$$

3. **חתכים קוניים - הגדרות.**
$*$ **פרבולה:** המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה נתונה במישור (מוקד הפרבולה) וישר נתון (הקו המדריך של הפרבולה).
$*$ **היפרבולה:** המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור שהפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות במישור (מוקדי ההיפרבולה) הוא קבוע.
$*$ **אליפסה:** המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור שסכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדי האליפסה) קבוע.
$*$ **חתך קוני כללי:** המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, שיחס המרחקים שלהן מנקודה נתונה (מוקד) ומקו ישר נתון (קו מדריך) קבוע ושווה למספר חיובי e (הקרוי אקסצנטריות). עבור $e < 1$ מתקבלת אליפסה, עבור $e = 1$ מתקבלת פרבולה, עבור $e > 1$ מתקבלת היפרבולה.

4. **חתכים קוניים - נוסחאות אנליטיות.**
$*$ **פרבולה:** משוואת פרבולה בעלת קו מדריך $x = -p/2$ ומוקד $(p/2, 0)$ היא $y^2 = 2px$.
$*$ **היפרבולה:** משוואת היפרבולה בעלת שני מוקדים $(-c, 0)$ ו-$(c, 0)$ והפרש פוקאלי $2a$ היא $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר $b^2 = c^2 - a^2$.
$*$ **אליפסה:** משוואת אליפסה בעלת שני מוקדים $(-c, 0)$ ו-$(c, 0)$ וסכום פוקאלי $2a$ היא

$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ כאשר $b^2 = a^2 - c^2$.

* **חתך קוני כללי:** נבחר מערכת צירים כך שציר x יהיה ציר הסימטריה של החתך וציר y ישיק לו בקודקוד. אזי חתך קוני ניתן לתיאור ע"י המשוואה $y^2 = 2px + \lambda x^2$. עבור $\lambda = 0$ המשוואה מתארת פרבולה, עבור $\lambda < 0$ - אליפסה, עבור $\lambda > 0$ - היפרבולה.

5. **משוואות משיקים לחתכים קוניים.** בהנחה שהעקומים מתוארים ע"י משוואות הסעיף הקודם, להלן מובאות משוואות המשיקים שלהם בנקודה (x_0, y_0).
   * היפרבולה: $\frac{yy_0}{b^2} - \frac{xx_0}{a^2} = 1$
   * אליפסה: $\frac{yy_0}{b^2} + \frac{xx_0}{a^2} = 1$
   * פרבולה: $yy_0 = p(x + x_0)$
   * חתך כללי: $yy_0 = p(x + x_0) + \lambda xx_0$.

6. **תכונות שונות של חתכים קוניים.**
   * תכונה אופיינית של אליפסה: הזויות בין משיק לאליפסה לשני הרדיוסים הפוקאליים מנקודת ההשקה הן שוות. רדיוס פוקאלי של אליפסה הוא הקטע בין אחד המוקדים לנקודה על האליפסה. תנאי דומה מתקיים עבור פרבולה, אם נגדיר את הנקודה $(+\infty, 0)$ להיות המוקד השני. אזי אחד הרדיוסים הוא קרן המקבילה לציר x.

7.† **תנאי כללי להשקת עקומים.** יהיו $C_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$, $C_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$, $t \in [a, b]$, שני עקומים מישוריים המתוארים על ידי פונקציות דיפרנציאביליות (כלומר "עקומים חלקים"). אזי C_1 ו-C_2 משיקים בנקודה משותפת שלהם $C_1(t_1) = C_2(t_2)$ אם מתקיים

$$\left.\frac{dx_1}{dy_1}\right|_{t_1} = \left.\frac{dx_2}{dy_2}\right|_{t_2} .$$

8.† **משפט פסקל.** אם משושה כלשהו חסום בחתך קוני, אזי נקודות החיתוך של שלושת הזוגות של הצלעות הנגדיות שלו (או המשכיהן) נמצאות על ישר אחד. שים לב לקשר בין משפט זה למשפט בריאנשון.

9.† **משפט בריאנשון (Brianchon).** אם משושה כלשהו חוסם חתך קוני, אזי הקטעים המחברים את שלושת הזוגות של קודקודים נגדיים שלו (או המשכיהם) עוברים דרך נקודה אחת.

אוניברסיטת חיפה, החוג למתמטיקה
פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער
פרויקט מדף הספרים המתמטי

0.11 מבוא לאנליזה

1. **משפט בולצנו-ויירשטרס (Bolzano-Weierstrass).**
לכל סדרה חסומה של מספרים ממשיים קיימת תת סדרה מתכנסת.

2. **משפט ערך הביניים.** תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהינה x_1, x_2 נקודות כלשהן כך ש-$a \le x_1 < x_2 \le b$ ו-$f(x_2) \ne f(x_1)$. אזי f מקבלת כל ערך בין $f(x_1)$ ו-$f(x_2)$ פעם אחת לפחות בקטע (x_1, x_2).
מסקנה: תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ והערכים $f(a)$ ו-$f(b)$ הם בעלי סימן שונה. אזי קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = 0$.

3. **משפט הערכים הקיצוניים.** פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת בקטע זה את ערך המינימום ואת ערך המקסימום, כלומר עבור f רציפה על $[a,b]$

$$\exists c_1, c_2 \in [a,b] \qquad \forall x \in [a,b] \qquad f(c_1) \le f(x) \le f(c_2)$$

4.[†] **נוסחת טיילור.** אם הפונקציה $f : \mathbf{C} \leftarrow \mathbf{C}$ היא אנליטית בתחום D המכיל את הנקודה x_0, אזי לכל x הטור הבא מתכנס וסכומו שווה ל-$f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

נציין, שהדבר אינו בהכרח נכון עבור כל פונקציה ממשית הגזירה אינסוף פעמים. תנאי מספיק להתכנסות טור טיילור לערך הפונקציה הוא שכל הנגזרות של f קיימות וחסומות על ידי קבוע אחד (כלומר חסומות במידה שווה).

5. **שימושים לנוסחת טיילור.** הטורים הבאים מתכנסים לכל $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \\
e^{-x} &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots
\end{aligned}$$

כתובת: פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער, החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה, חיפה 31905
טל: 04-8240699, פקס: 04-8240024 אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

הטורים הבאים מתכנסים עבור $-1 < x \le 1$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \\ -\ln(1-x) &= x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \end{aligned}$$

6. <u>**משוואות פונקציונליות.**</u> להלן רשימת הפתרונות לכמה משוואות פונקציונליות ידועות. בכולן מניחים כי הנתון מתייחס לכל x, y בתחום ההגדרה, והפתרון הנדרש הוא פונקציה רציפה בתחום זה. כאן לא צויינו הפתרונות הטריוויאליים $f(x) \equiv 0$ המתאימים לחלק מהמקרים. במקרים (i), (v), (vi) המשוואה הנתונה מתייחסת לערכים חיוביים של x ו-y. בשאר המקרים המשוואה מתייחסת לכל ערך ממשי.

	נתון	פתרון
(i)	$f(xy) = y^k f(x)$	$f(x) = cx^k$
(ii)	$f(x+y) = f(x)$	$f(x) = c$
(iii)	$f(x+y) = f(x) + f(y)$	$f(x) = cx$
(iv)	$f(x+y) = f(x)f(y)$	$f(x) = c^x, \quad c \ge 0$
(v)	$f(xy) = f(x) + f(y)$	$f(x) = c\ln x$
(vi)	$f(xy) = f(x)f(y)$	$f(x) = x^c$
(vii)	$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$	$f(x) = cx + a$
$(viii)$	$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$	$f(x) = \cosh bx, \cos bx$

<u>הערה:</u> $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער

פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער מפעיל מגוון תחרויות מתמטיקה ארציות, תחרות דו לאומית עם נבחרת הונגריה שהיא מעצמה עולמית בתחום, ומכין את הנבחרת הישראלית לקראת אולימפיאדת המתמטיקה הבינלאומית. קהל היעד של הפרויקט הוא תלמידי תיכון בארץ, בעלי מוטיבציה וכשרון למתמטיקה. הפרויקט נתמך על ידי אוניברסיטת חיפה ועל ידי משרד החינוך.

מדף הספרים המתמטי של פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער

מדף הספרים המתמטי של פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער הוא מבצע פיתוח של אוסף ספרים, ספרונים וחוברות מתמטיקה בעברית, המציע למתעניינים ולמועמדים פוטנציאליים לתחרויות מתמטיקה, חומר העשרה, לימוד וחומר לעבודה עצמית.

פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער ומדף הספרים המתמטי הוקמו ופועלים בראשותו של פרופ' שי גירון, חבר סגל בחוג למתמטיקה באוניברסיטת חיפה.

דואר אלקטרוני: israelmo@math.haifa.ac.il

אינטרנט: http://math.haifa.ac.il/~israelmo

סדרת פרסומי מדף הספרים המתמטי של פרויקט התחרויות במתמטיקה לנוער